# H24 年金数理人会試験解答

pseudomathematician

平成 29 年 10 月 28 日

**問題 1**.(C)
$L_t^k$ を第 $k$ 世代の時点 $t$ の人数，$R_t = L_t^1/L_t^2$ とする．$L_t^1 = \alpha(L_{t-1}^1 + L_{t-1}^2)$, $L_t^2 = pL_{t-1}^1$ より，

$$R_t = \frac{\alpha}{p}\left(1 + \frac{1}{R_{t-1}}\right)$$

となるが，収束性の議論は無視して，$\lim_{t\to\infty} R_t = R$ とすると，$R = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\alpha p}}{2p}$ を得る．

**問題 2**.(A)
60 歳の死力 $\mu_{60}^{(T)}$ を求める問題である．

$${}_tp_{60}^{(T)} = \frac{{}_{20+t}p_{40}^{(T)}}{{}_{20}p_{40}^{(T)}} = \frac{1-\frac{20+t}{60}-\frac{20+t}{240}\left(\frac{20+t}{40}+1\right)}{1-\frac{20}{60}-\frac{20}{240}\left(\frac{20}{40}+1\right)}$$

より，

$$\mu_{60}^{(T)} = -\frac{1}{{}_tp_{60}^{(T)}}\frac{d}{dt}{}_tp_{60}^{(T)}\Bigg|_{t=0} = 0.0462.$$

**問題 3**.(B)

$$\int_0^{20}(20+t)e^{-\int_0^t \delta_s ds}e^{-\int_0^t \mu_{x+s}ds}dt = 252.83.$$

**問題 4**.(A)
$k=1$ で確認すればすぐわかる．一般の場合を確認しようとすると，${}_kp_x = 0$ に注意して，

$$\ddot{a}_{x:\overline{k}|} + \sum_{t=1}^k (k-t)v^t{}_{t-1|}q_x = \frac{1}{d}(1-A_{x:\overline{k}|}) + \frac{1}{k}\sum_{t=1}^k(k-t)v^t$$
$$= \frac{1}{d}\left(1-\frac{1}{k}\sum_{t=1}^k v^t - v^k{}_kp_x\right) + \frac{1}{k}\sum_{t=1}^k(k-t)v^t$$
$$= \frac{1}{d}\left(1-\frac{a_{\overline{k}|}}{k}\right) + a_{\overline{k}|} - \frac{1}{k}\sum_{t=1}^k tv^t$$
$$= \frac{2}{d}\left(1-\frac{a_{\overline{k}|}}{k}\right) - \frac{1}{d} + a_{\overline{k}|} + \frac{v^{k+1}}{d} = \frac{2}{d}\left(1-\frac{a_{\overline{k}|}}{k}\right) - 1.$$

**問題 5**.(C)

$$0.9\times\left(\frac{F}{\ddot{a}_{\overline{10}|}^{(5.5)}}\right)\left(\ddot{a}_{\overline{10}|}^{(2.0)} + {}_{10|}\ddot{a}_{\overline{60}|}^{(2.0)}\right) = \left(\frac{F'}{\ddot{a}_{\overline{10}|}^{(2.0)}}\right)\ddot{a}_{\overline{10}|}^{(2.0)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{F'}{F} = 0.9\times\frac{9.1622+\frac{356{,}742.13}{37{,}532.39}}{7.9522} = 2.11.$$

**問題 6**.(B)
面倒なので，$\omega = x_{r+2}$ とする．

$$l_{x_r}\cdot(e_{x_r} - a_{\overline{x_r}|}) = l_{x_r}\cdot\left(\frac{l_{x_r+1}}{l_{x_r}} - v\frac{l_{x_r+1}}{l_{x_r}}\right) = d\cdot l_{x_r+1}$$

なので，これに一致する選択肢を選べばよい．

**問題 7**.(B)
$i = \frac{\ddot{a}_{\overline{14}|}-\ddot{a}_{\overline{13}|}}{\ddot{a}_{\overline{15}|}-\ddot{a}_{\overline{14}|}} - 1 = 0.02, U = 0.10\times 13.10625 = 1.310625, U_1 = (U-0.17)\times 1.02 = 1.163438, U_2 = (U_1 - 0.10)\times 1.02 = 1.084707, \cdots, U_{14} = 0.007639 < 0.10/12$ より．

**問題 8**.(E)
面倒なので $S^p = 0$ とする．給付水準引下後の水準を $\alpha$ とおく．

| 再計算時 | 脱退発生後 | 引下後 |
|---|---|---|
| $S^f$ | $0.8S^f$ | $0.8\alpha S^f$ |
| $S_{FS}^a$ | $0.8S_{FS}^a$ | $0.8\alpha S_{FS}^a$ |
| $S_{PS}^a$ | $0.8S_{PS}^a$ | $0.8\alpha S_{PS}^a$ |
| $S^p = 0$ | 0 | 0 |
| $G^f$ | $0.8G^f$ | $0.8G^f$ |
| $G^a$ | $0.8G^a$ | $0.8G^a$ |
| $V = S_{PS}^a$ | $0.8S_{PS}^a$ | $0.8\alpha S_{PS}^a$ |
| $F = 0.75S_{PS}^a$ | $0.55S_{PS}^a$ | $0.55S_{PS}^a$ |
| $U = 0.25S_{PS}^a$ | $U$ | $(3.2\alpha - 2.2)U$ |
| $P$ | $P$ | $\alpha P$ |
| $P' = 0.5P$ | $P'/0.8 = P/1.6$ | $(3.2\alpha-2.2)P/1.6$ |
| $L$ | $0.8L$ | $0.8L$ |

上表より，

$$P + 0.5P = \alpha P + \frac{(3.2\alpha-2.2)P}{1.6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{23}{24}.$$

**問題 9**.(C)
${}^{A}V_0 = {}^{U}F$ より，(B)，(C)．あとは，${}^{A}V_1$ をごりごり計算し確認すればよい．そのときは，${}^{E}P = S^f/G^f = S^f/G^a$ 等を利用して計算する．(この計算は面倒なので，上手い方法で (B) か (C) を選びたかったが思いつかなかった．)

**問題 10**.(A)
$C_x^{(w)} = v^{x+1} \cdot d_x^{(w)} = v^{x+1} \cdot (l_x^{(T)} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} - l_{x+1}^{(T)}) = v\frac{l_{x+1}}{l_x}D_x^{(T)} - D_{x+1}^{(T)} = \frac{D_{x+1}}{D_x}D_x^{(T)} - D_{x+1}^{(T)}$ に注意．支出現価は，

$$\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\frac{C_x^{(w)}}{D_{x_e}}\cdot\frac{D_{x_r}}{D_{x+1}}\cdot(x-x_e+1)A\cdot\frac{N_{x_r}}{D_{x_r}}+\frac{D_{x_r}^{(T)}}{D_{x_e}}\cdot(x_r-x_e)A\cdot\frac{N_{x_r}}{D_{x_r}}$$

と書けるが，整理するのは面倒なので，$x_r = x_e + 1$ とでもしておけばわかる．

**問題 11**.(B)
簡便のため，$n = x_r - x_e$ とおく．支出現価は，

$$\begin{aligned}&\int_0^n tK\cdot v^t\cdot {}_tp_{x_e}\cdot\mu dt + nK\cdot v^n\cdot {}_np_{x_e}\\&=\mu K\int_0^n t\cdot e^{-t(\mu+\delta)}dt + nK\cdot e^{-n(\mu+\delta)}\\&=\mu K\left(-\frac{n}{\mu+\delta}\cdot e^{-n(\mu+\delta)}+\frac{1-e^{-n(\mu+\delta)}}{(\mu+\delta)^2}\right)\\&\qquad\qquad + nK\cdot e^{-n(\mu+\delta)}\\&=K\left(n\cdot e^{-n(\mu+\delta)}\cdot\frac{\delta}{\mu+\delta}+\mu\cdot\frac{1-e^{-n(\mu+\delta)}}{(\mu+\delta)^2}\right)\end{aligned}$$

であり，収入現価は，

$$\int_0^n v^t\cdot {}_tp_{x_e}dt = \frac{1-e^{-n(\mu+\delta)}}{\mu+\delta}$$

より．

**問題 12**.(D)
$p_x = \dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-1}{v\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}$ より，脱退残存表を作る．計算しやすいように $l_{50} = 100$ とする．

| $x$ | $p_x^{(d)}$ | $q_x^{(d)}$ | $q_x^{(w)}$ | $l_x^{(T)}$ | $D_x^{(T)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 0.950 | 0.050 | 0.10 | 100.000 | 8.720 |
| 51 | 0.945 | 0.055 | 0.10 | 85.000 | 7.059 |
| 52 | 0.940 | 0.060 | 0.10 | 71.825 | 5.681 |
| 53 | | | | 60.333 | 4.545 |

また，$\ddot{a}_{\overline{5}|} = \frac{1-v^5}{1-v} = 4.546$．以上より，${}^{U}P_{50} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{D_{53}^{(T)}}{D_{50}^{(T)}}\cdot 3\ddot{a}_{\overline{5}|} = 2.369$ を得る．

**問題 13**.(D)

| | A | B | A&B |
|---|---|---|---|
| $S^p$ | $S_A^p$ | $0.10S_A^p$ | $1.2\alpha S_A^p$ |
| $S^a$ | $S_A^a$ | $0.10S_A^a$ | $1.2\alpha S_A^a$ |
| $S^f$ | $S_A^f$ | $0.10S_A^f$ | $1.2\alpha S_A^f$ |
| $G^a$ | $G_A^a$ | $0.2G_A^a$ | $1.2G_A^a$ |
| $G^f$ | $G_A^f$ | $0.2G_A^f$ | $1.2G_A^f$ |
| $V$ | $V_A$ | $0.1V_A$ | $1.2\alpha V_A$ |
| $F$ | $0.5V_A$ | $0.05V_A$ | $0.55V_A$ |
| $U$ | $0.5V_A$ | $0.05V_A$ | $(1.2\alpha-0.55)V_A$ |
| $L$ | $L_A$ | $0.2L_A$ | $1.2L_A$ |
| 給付水準 | 1 | 0.5 | $\alpha$ |
| 標準 P 率 | $P_A$ | $0.5P_A$ | $\frac{1.2\alpha S_A^f}{1.2G_A^f} = \alpha P_A$ |
| 特別 P 率 | $P_A$ | $0.5P_A$ | $(2\alpha - \frac{1.1}{1.2})P_A$ |
| 合計 P 率 | $2P_A$ | $P_A$ | $(3\alpha - \frac{1.1}{1.2})P_A$ |
| 合計 P 額 | $2P_AL_A$ | $0.2P_AL_A$ | $(3.6\alpha-1.1)P_AL_A$ |

ただし，問題の条件より，$P_A = \frac{0.5V_A}{L_A\times\mathrm{Const}}$ なので，B および A と B の合併後の特別保険料率は，それぞれ，$\frac{0.05V_A}{1.2L_A\times\mathrm{Const}} = 0.5P_A$, $\frac{(1.2\alpha-0.55)V_A}{1.2L_A\times\mathrm{Const}} = (2\alpha-\frac{1.1}{1.2})P_A$ と，計算されることに注意．よって，

$$2P_AL_A + 0.2P_AL_A = (3.6\alpha-1.1)P_AL_A \Leftrightarrow \alpha = \frac{11}{12}$$

を得る．

**問題 14**.(D)
問題文が冗長すぎるが，非常に簡単な問題である．42 歳までの予定脱退率が 0 なので，加入 3 年以上の生存脱退の脱退一時金に対する保険料はとらない．そのため，年金部分だけ検討すればよい．制度変更前後の年金給付を比べる．加入期間 $a \geq 20$ 年の $x$ 歳の脱退時に獲得している年金原資は，制度変更前で $a\frac{A}{\ddot{a}_{\overline{15}|}^{(5.5)}}\ddot{a}_{\overline{15}|}^{(5.5)}$，制度変更後で $a\frac{A}{\ddot{a}_{\overline{15}|}^{(2.5)}}\ddot{a}_{\overline{15}|}^{(5.5)}$ である．後者について補足すると，後者は脱退後即時給付ではないものの，定年まで生存しても定年前の期中に死亡しても単なる責任準備金を給付するものと考えられるからである．よって，年金給付は，制度変更前後で $\frac{\ddot{a}_{\overline{15}|}^{(5.5)}}{\ddot{a}_{\overline{15}|}^{(2.5)}} = 0.834428$ 倍になる．以上より，制度変更後の責任準備金，標準保険料率はそれぞれ，$V = 315,419\times 0.834428 = 263,194$, $P = 0.025\times 0.834428 = 0.021$ となる．よって，特別保険料率は $\frac{263,194-207,692}{171,013\times\ddot{a}_{\overline{t}|}^{(2.5)}} = 0.04 - 0.021 = 0.019$ を満たすから，$\ddot{a}_{\overline{t}|}^{(2.5)} = 16.96$ となり，$t > 10$ を得る．よって給付水準を下げる必要がある．給付水準を従来の $k$ 倍に引き下げるとする．状況を整理すると，次表のようになる．

| | 変更前 | 変更後 | 給付水準引下後 |
|---|---|---|---|
| $F$ | $207,692$ | $207,692$ | $207,692$ |
| $V$ | $315,419$ | $263,194$ | $263,194k$ |
| $U$ | $107,727$ | $55,502$ | $263,194k-207,692$ |
| $L$ | $171,013$ | $171,013$ | $171,013$ |
| $P$ | $0.025$ | $0.021$ | $0.021k$ |
| $P'$ | $0.015$ | $0.019$ | $0.040-0.021k$ |
| $P+P'$ | $0.040$ | $0.040$ | $0.040$ |

以上より，

$$\frac{263,194k-207,692}{171,013\times 8.97087}=0.040-0.021k \Leftrightarrow k=0.91$$

を得る．

**問題 15**.(D)

${}^{OAN}P=\frac{S^a_{FS}+s^f}{G^a+G^f}=0.4$, ${}^{OAN}V=S^p+S^a_{PS}=630,000$, $U=V-F=130,000$, $P'=\frac{U}{124,000\times 6.41719}=0.1634$, $P+P'=0.5634$ および，${}^{E}P=\frac{S^f}{G^f}=0.25$, ${}^{E}V=S^a+S^p-{}^{E}PG^a=705,000$, $U=V-F=205,000$, $P'=\frac{U}{124,000\times 6.41719}=0.2576$ $P+P'=0.5076$．以上より，$\frac{0.5076}{0.5634}=0.90$．

**問題 16-20**. 公式解答の通り．

（注）面倒なので問題 16 は考えていない．

以上