平成 18 年度 東大数理研 専門科目 B (筆記試験)

pseudomathematician

平成 30 年 11 月 15 日

H18 B 第 9 問

問題は，東京大学名誉教授の岡本和夫先生のウェブサイト，または東大数理研のウェブサイトの大学院入試案内から取得してください．なお，後者は直近過去 3 年分しか公開されていませんが，探せばある程度過去の問題も取得可能です．

解答

(1)

$0 < R \le r$ に対し，Cauchy の積分公式より，

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=R}\frac{f(z)}{z-a}dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}+a)d\theta$$

が成り立つ．これより，

$$|f(a)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(Re^{i\theta}+a)|d\theta$$

を得る．この両辺に R を乗じ，0 から r で積分すると，

$$\begin{aligned}\int_0^r R|f(a)|dR = \frac{r^2}{2}|f(a)| & \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^r RdR\int_0^{2\pi}|f(Re^{i\theta}+a)|d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|z-a|\le r}|f(z)|dxdy \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_D|f(z)|dxdy\end{aligned}$$

となる．以上より，

$$|f(a)| \le \frac{1}{\pi r^2}\int_D|f(z)|dxdy$$

が成り立つ． ■

(2)

$0 < R < 1$ に対し，

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{i\theta})}{(Re^{i\theta})^n}d\theta$$

より，

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(Re^{i\theta})|}{R^n}d\theta$$

が成り立つ．いま，(1) において，$D = \Delta^*$, $a = Re^{i\theta}$ とすれば，任意の $0 < r < d(a, \partial D) \le \frac{1}{2}$ に対し，

$$f(Re^{i\theta}) \le \frac{1}{\pi r^2}\int_{\Delta^*}|f(z)|dxdy$$

が成り立つ．以上より，

$$\begin{aligned}|a_n| &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\pi r^2}\int_{\Delta^*}|f(z)|dxdy\right)d\theta \\ &= \frac{1}{\pi r^{n+2}}\int_{\Delta^*}|f(z)|dz\end{aligned}$$

が成り立つ． ■

(3)

$g(z) = f'(z)$, $M = \int_{\Delta^*}|g(z)|dxdy$ とおく．$g(z)$ の Laurent 展開を $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$ とし，(2) の結果を g に適用させることで，

$$|b_n| \le \frac{M}{\pi r^{n+2}}$$

を得る．これより，$n \le -3$ のとき，$r \to 0$ とすれば，$|b_n| \to 0$ すなわち，$b_n = 0$ ($n \le -3$)．今，$b_{-2} \ne 0$ と仮定する．

$$\begin{aligned}g(z) &= b_{-2}z^{-2} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \\ &= b_{-2}z^{-2}h(z)\end{aligned}$$

と書ける．ただし，$h(z)$ は $\Delta^* \cup \{0\}$ 上正則で $h(0) = 1$．

M を計算する．

$$\begin{aligned}M &= \int_{\Delta^*}|b_{-2}z^{-2}||h(z)|dxdy \\ &= \int_0^1|b_{-2}|r^{-1}dr\int_0^{2\pi}|h(re^{i\theta})|d\theta\end{aligned}$$

ここで，ある $0 < \varepsilon$ で，$\int_0^{2\pi}|h(re^{i\theta})|d\theta \ge \varepsilon$ とでき，

$$\ge \int_0^1 \varepsilon|b_{-2}|r^{-1}dr = \infty$$

となり，矛盾．よって，$b_{-2} = 0$ でなくてはならない．$g(z) = f'(z)$ であることに注意すると，$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ において，$a_n = 0$ ($n < 0$) となることから，f は 0 を極に持たない．すなわち，$f(z)$ は $\Delta^* \cup \{0\}$ 上の正則関数に拡張される． ■

以上