

平成 15 年度 東大数理研 専門科目 B (筆記試験)

pseudomathematician

平成 30 年 11 月 19 日

H15 B 第 8 問

H15 年度の問題は入手困難なようです。当該問題のみ
解答メモがあったので公開します。

解答

w を $f(z)$ の位数 k の零点とすれば、仮定の不等式より w は $g(z) := f(az)$ の位数 k 以上の零点でもある。よって、 $g(z)/f(z)$ は \mathbb{C} 上有界な正則関数、よって定数。定数 C を用いて $g(z)/f(z) \equiv C$ とおく。仮定の不等式より、 $|C| \leq K$ である。明らかに、以下 2 式が成り立つ：

$$g^{(n)}(0) = a^n f^{(n)}(0), \quad g^{(n)}(0) = C f^{(n)}(0).$$

よって、以下が成り立つ：

$$(a^n - C) f^{(n)}(0) = 0.$$

ここで、 $a^n > K$ とすれば、 $a^n > |C|$ であり、 $f^{(n)}(0) = 0$ 。すなわち、 $f(z)$ は次数は高々 $\log K / \log a$ の多項式となる。 ■

以上