平成 9 年度 東大数理研 専門科目 B (筆記試験)

pseudomathematician

平成 30 年 11 月 17 日

H9 B 第 9 問

問題は，日本数学教育学会発行「平成 9 年度 大学院修士課程入学試験数学問題集」をご覧ください．

解答

(1)

$z = x + iy$, $g(z) = f'(z)$ とおき，$g(z)$ のべき級数展開を $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ とおく．

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 r d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) \cdot \overline{g(re^{i\theta})} r d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n r^n e^{in\theta} \right) \cdot \overline{g(re^{i\theta})} r d\theta dr
\end{aligned}
$$

明らかに項別積分可能なので，

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left(d_n r^n e^{in\theta} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{d_m} r^m e^{-im\theta} \right) r d\theta dr \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(d_n \overline{d_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta} \right) r d\theta dr
\end{aligned}
$$

同様に項別積分可能なので，

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \sum_{n,m=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left(d_n \overline{d_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta} \right) r d\theta dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2 r^{2n+1} \right) dr
\end{aligned}
$$

ルベーグ積分の意味で項別積分可能なので，

$$
= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2
$$

を得る． ■

(2)

任意の $z \in D$ に対して，

$$
\begin{aligned}
|f(z)|^2 &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \right|^2 = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} c_n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} z^n \right|^2 \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |z|^{2n} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\pi \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |z|^{2n} \right) \\
&= \frac{I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |z|^{2n} = \frac{I}{\pi} \log \left(\frac{1}{1 - |z|^2} \right)
\end{aligned}
$$

となるので，これより

$$
|f(z)| \leq \sqrt{\frac{I}{\pi} \log \left(\frac{1}{1 - |z|^2} \right)}
$$

が成り立つ． ■

以上